1. מצא את השאריות של הפונקציות הבאות בכל נקודות סינגולאריות:

א'). $f(z)=\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$ ב'). $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-2}$ ג'). $f(z)=z^n\sin\dfrac{1}{z}$

פתרון:

א'). נקודות הסינגולאריות של הפונקציה הנתונה הינן $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=\infty$.

1. **הנקודה** $z_1=0$ **הינה קוטב מסדר** 2 **של הפונקציה. לכן:**

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{x\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2 f(z)\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2-2z}{(z-1)^2}=0 \qquad (1.1)$$

2. **הנקודה** $z_2=1$ **הינה קוטב מסדר** 1**, ולכן:**

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1} f(z)(z-1)=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+z-1}{z^2}=1 \qquad (1.2)$$

3. **כיוון שמתקיים:**

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)+\operatorname*{Res}_{\infty} f(z)=0 \qquad (1.3)$$

מקבלים כי $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z)=-1$

ב'). כיוון שהפיתוח של הפונקציה הנתונה לטור Laurent הינו:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^{2n}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2}\right)^2+\ldots \qquad (1.4)$$

המקדם של $(z-2)^{-1}$ **שווה ל-** 0**, ולכן** $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)=0$.

ג'). לכיוון שהפיתוח של הפונקציה לטור Laurent בסביבת $z=0$ **הינו:**

$$f(z)=z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k-n+1}} \qquad (1.5)$$

השוויון $2k-n+1=1$ **בלתי אפשרי אם** $n<0$ **או אם** $n\in\mathbf{Z}$ **ואי זוגי. לכן, במקרים האלה** $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\operatorname*{Res}_{\infty} f(z)=0$.

אם $n=2m$ **כאשר** $m\geqslant 0$ **, אזי החלק העקרי של טור Laurent של הפונקציה יכלול את האיבר:**

$$\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^{-1}=\frac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!}z^{-1} \qquad (1.6)$$

לכן, עבור כל ה- $n \in \mathbf{Z}^+$ הזוגיים נקבל: $\underset{\infty}{\operatorname{Res}} f(z) = -\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) = \frac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!}$.

2. חשב את האינטגרלים:

א'). $\int\limits_{\Gamma_R} \frac{z\,dz}{e^{2\pi i z^2}-1}$ **כאשר** $\Gamma_R = \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| = R, n < R^2 < n+1, n \in \mathbf{N} \right\}$

פתרון:

בתוך המעגל הנתון נמצאים $4n+1$ **קוטבים של הפונקציה:** $z=0$ **והנקודות** $z_m = \sqrt{k} e^{\frac{i\pi m}{2}}$ **כאשר** $m = 0,1,2,3$ **. לכן:**

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{z\,dz}{e^{2\pi i z^2}-1} &= 2\pi i \left(\underset{z=0}{\operatorname{Res}} \frac{z}{e^{2\pi i z^2}-1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{3} \underset{z=z_m}{\operatorname{Res}} \frac{z}{e^{2\pi i z^2}-1} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{3} \frac{1}{4\pi i e^{(-1)^m 2\pi i k}} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i} + \frac{n}{\pi i} \right) = 2n+1 \end{aligned} \tag{1.7}$$

(ג'): תהי $z=\infty$ נקודה סינגולרית מבודדת של הפונקציה f.
הפיתוח לורן Laurent של הפונקציה בסביבת ה-∞:

$$U_\infty = \{z\in \mathbb{C} \mid r<|z|<\infty\}$$

היינו:
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\cdot z^n .$$

נבצע אינטגרציה של השוויון הנ"ל לאורך המעגל בעל רדיוס R בכיוון השעון, Γ_R^-. עקב כך ה-∞ "נשמר" משמאל. נקבל:

$$\int_{\Gamma^-} f(z)dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\cdot\int_{\Gamma^-} z^n dz = -2\pi i\cdot c_{-1}$$

כיוון ש- $\int_{\Gamma^-} z^n dz=0,\ n\neq 1$.

מכאן נובע כי:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} f(z)dz = -c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$$

לכן:

$$\int_{\Gamma_2}\sqrt{\frac{z}{z+1}}\,dz = -2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{\infty}\sqrt{\frac{z}{z+2}} = -2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{2}{z}\right)^{1/2}} =$$
$$= -2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{\infty}\left(1-\frac{1}{z}+o(1/z)\right) = -2\pi i.$$

:(א')

$$\frac{1}{z}\cdot \sin^2\frac{2}{z}=\frac{1}{2z}\cdot\left(1-\cos\frac{4}{z}\right)=\frac{1}{2z}\cdot\left(1-\left[1-\frac{1}{2!}\left(\frac{4}{z}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{4}{z}\right)^4-\dots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(-1)^{n-1}\cdot\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}+\dots\right]\right)=\frac{1}{2z}\cdot\left(\frac{1}{2!}\,\frac{16}{z^2}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{256}{z^4}+(-1)^n\cdot\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}+\dots\right)$$

$$=\left(\frac{4}{z^3}+\frac{256}{2\cdot 4!}\cdot\frac{1}{z^5}+\dots+\frac{(-1)^n}{2\cdot(2n-2)!}\cdot z^{2n-1}+\dots\right).$$

:(ב')

$$\frac{1-e^{-z}}{z^3}=\frac{1}{z^3}\cdot\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\right)=\frac{1}{z^3}\cdot\left\{\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot z^n=\right.$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot z^{n-3}$$

:(ג')

$|z-2|\neq 0$:

$$\frac{\sin z}{z-2}=\frac{1}{z-2}\cdot\sin((z-2)+2)=\frac{1}{z-2}\cdot\left(\sin(z-2)\cos 2+\cos(z-2)\cdot\sin 2\right)=$$

$$=\frac{1}{z-2}\left[\cos 2\cdot\sum_{n=\cancel{1}}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(z-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\sin 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}\right)=$$

$$=\cos 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot(z-2)^{2n-2}+\sin 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}\cdot z^{2n-3}$$

4

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^4}=\frac{1}{z^4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot z^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot z^{2n-5}=$$

$$=\frac{1}{z^3}+\dots \Rightarrow$$

הנקודה $z=0$ הינה קוטב מסדר 3 של הפונקציה!

5

$$f(z)=\cos\left(e^{1/z}\right)=\cos\Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}}_{\alpha(z)}\Big)=1-\frac{1}{2!}\alpha^2(z)+\frac{1}{4!}\alpha^4(z)-\dots$$

ברור כי הפיתוח האחרון לא כולל פעולה אשר "מסלקת" את ה-z מהמכנה של מחובר. לכן, הפיתוח של $f(z)$ כולל אינסוף מחוברים הכוללים z במכנה והחזקה (במכנה) עולה! $\Rightarrow$ $z=0$ - נק' סינגולרית עיקרית!!

...

5 (סעיף ב')

ניקח $z_n = \frac{1}{\ln(n\pi)}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

נקבל:

$$\cos\left(e^{1/z_n}\right) = \cos\left(e^{\ln(n\pi)}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

לסדרה הזאת אין גבול עבור $n \to \infty$!

6: נניח כי הפונקציה $f(z)$ בעלת פיתוח (בסביבת $z=0$):

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$$

כיוון שהפונקציה שלמה, רדיוס ההתכנסות של הטור שווה ל-∞.

לפי הנתון, ∞ הינה קוטב (מסדר m) של הפונקציה, ולכן לפי ההגדרה $z=0$ הינה קוטב (מסדר m) של $f(1/z)$, נקבל:

$$f(1/z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_m}{z^m};$$

לכן, ישנם רק מספר סופי של מקדמים שונים מ-0 $\Rightarrow$ $f(z)$ - הינה פולינום.

7:

על מעגל היחידה מקבלים:

$$|z^n - (z^n - f(z))| = |f(z)| < 1$$

משפט Rouche מיושם, כי לפונקציות z^n ו-$(z^n - f(z))$ אותה כמות שורשים בעיגול הפתוח. מהעובדה כי ל-z^n יש אפס מסדר n ב-$z=0$ מקבלים את מ.ש.ל.

8: לפי משפט השארית:

$$I = \oint_C \tan z \, dz = 2\pi i \sum_{|z_m|<6} \operatorname{Res}_{z=z_m} \tan z.$$

והנקודות הסינגולריות של $f(z)=\tan z$ אשר נמצאות בתוך העיגול $\{|z|<6\}$ הינן:

$$\cos z = 0 \Rightarrow z_n = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} z_{-2} &= -\frac{3\pi}{2}, \\ z_{-1} &= -\frac{\pi}{2}, \\ z_0 &= \frac{\pi}{2}, \\ z_1 &= \frac{3\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \Rightarrow |z|<6$$

$$f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \Rightarrow \varphi(z) = \sin z$$

$$\psi(z) = \cos z \Rightarrow \psi(z_i) = 0, \ i = \overline{-2,1}$$

$$\psi'(z_i) \neq 0, \ i = \overline{-2,1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=z_i} \tan z = -\frac{\sin z_i}{\sin z_i} = -1 \Rightarrow I = 2\pi i \cdot (-4) = -8\pi i.$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{z^n}{3^n+1}=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{3^n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+1}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{-n}+1}\cdot\frac{1}{z^n}}_{\Sigma_1}+$$

$$\begin{Bmatrix} m=-n \\ n=-m \\ m\to n \end{Bmatrix}$$

$$+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+1}}_{\Sigma_2}$$

(a): Σ_2: $\frac{1}{R_1}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n+1}}=\frac{1}{3} \Rightarrow R_2=3$

(b): Σ_1: $\frac{1}{R_1}=\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{3^{-n}+1}}=1 \Rightarrow R_1=1.$

לכן, הטור מתכנס בטבעת: $1<|z|<3$